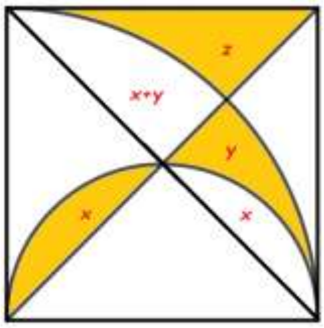
Le memorie di Roksteg
I re perduti di Gherrod

Soluzioni

(1) Tempesta di fiamme	**25**
(2) Numeri magici	**5456**
(3) La saggezza di Ghalor	**23**
(4) Il culto dei nani	**4**
(5) La lotteria	**7**
(6) Gli unicorni	**2221**
(7) Le costellazioni	**1432**
(8) Fiumi di birra	**2651**
(9) Il Martello Rugginoso	**5557**
(10) Wenra è sparita	**75**
(11) Luci nel sottosuolo	**1501**
(12) Il cubo di ossidiana 1	**1641**
(13) Il cubo di ossidiana 2	**3**
(14) Il tesoro di Voran	**3151**
(15) La gemma lavorata	**38**
(16) La fontana di luce di Nahrum	**8880**
(17) Thormur	**7**
(18) Raffiche di vento	**8160**
(19) Il teletrasporto	**31**
(20) Furia	**9**



Soluzione (1) Si osserva facilmente che l'area colorata è esattamente un quarto dell'area del quadrato di lato 10 *pertiche*.

$$A_C = \frac{1}{4} A_Q = 25 \textit{ pertiche quadrate}.$$

La risposta è dunque **25**.

Soluzione (2) Si osserva innanzitutto che, dato un intero positivo a, risulta $\lfloor \sqrt{a} \rfloor = \lceil \sqrt{a} \rceil$ se a è un quadrato perfetto. In numeri magici che dobbiamo considerare sono quindi i quadrati di numeri dispari minori di 1000. Allora

$$1 + 9 + \cdots + 961 = \sum_{k=1}^{16} (2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{16} (4k^2 - 4k + 1) =$$

$$= 4\sum_{k=1}^{16} k^2 - 4\sum_{k=1}^{16} k + \sum_{k=1}^{16} 1 = 4\frac{16 \cdot 17 \cdot 33}{6} - 4\frac{16 \cdot 17}{2} + 16 = 16(34 \cdot 11 - 34 + 1) = 5456$$

La risposta è dunque **5456**.

Soluzione (3) Il numero delle diagonali di un poligono regolare di n lati è $N_d = \frac{n(n-3)}{2}$. Allora si deve risolvere l'equazione $10n - 51 = \frac{n(n-3)}{2}$ che semplificata diventa $(n-6)(n-17) = 0(n-6)(n-17) = 0$. Quindi i poligoni regolari cercati sono quello di 6 e quello di 17 lati. La risposta è dunque **23**.

Soluzione (4) La disequazione $|x| + |y| \leq 100$ individua la regione di piano R rappresentata in figura. Troviamo le soluzioni dell'equazione diofantea $24x + 25y = 26$. L'equazione ha soluzioni poiché $24{,}24$ *e* 26 sono primi tra loro. Una soluzione particolare è la coppia $(-26{,}26)$ e quindi la soluzione generale è $(-26 + 25k, 26 - 24k)$ con $k \in \mathbb{Z}$. Le soluzioni dell'equazione che appartengono alla regione R sono quelle che si ottengono per $k = 0, 1, 2{,}3$. La risposta è $\mathbf{4}$.

Soluzione (5) Dato che $2026 = 2 \cdot 1013$ le possibili terne di interi che verificano le condizioni richieste sono: $(-2026, -1, 1)$, $(-1013, -2{,}1)$, $(-1013, -1, 2)$, $(-2, -1, 1013)$, $(-1, -1{,}2026)$, $(1{,}2{,}1013)$, $(1{,}1{,}2026)$. La risposta è dunque **7**.

Soluzione (6) Dato che $f = 2021 - m$, si ha $f^2 + m^2 = (2021 - m)^2 + m^2 = 2m^2 - 4042m - 2021^2$. La quantità considerata si minimizza per $m = \frac{2021}{2}$. Poiché $f, m \in \mathbb{N}$, si ha $f = 1010$ e $m = 1011$. Allora il valore minimo cercato è $f^2 + m^2 = 1010^2 + 1011^2 = 1020100 + 1022121 = 2042221$. La risposta è dunque $\mathbf{2221}$.

Soluzione (7) Si tratta innanzitutto di calcolare

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ora $\frac{2026}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot 1013 = 1{,}4142 \cdot 1013 = 1432{,}5846$. La risposta è dunque $\mathbf{1432}$.

Soluzione (8) Indicando con $n = 2024$ si può scrivere

$$\frac{2026^4 + 2025^4 + 1}{2026^2 + 2025^2 + 1} = \frac{(n+1)^4 + n^4 + 1}{(n+1)^2 + n^2 + 1} = \frac{2n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 2}{2n^2 + 2n + 2} = \frac{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1}{n^2 + n + 1}$$

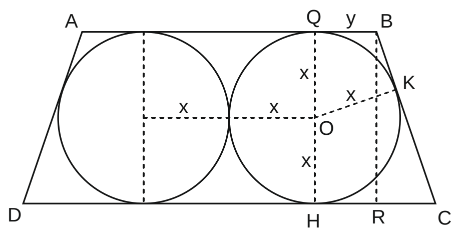
Svolgendo la divisione tra i due polinomi si ottiene

$$n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1 = (n^2 + n + 1)(n^2 + n + 1).$$

Quindi il valore cercato risulta uguale a $2025^2 + 2025 + 1 = 4102651$.La soluzione è dunque $\mathbf{2651}$.

Soluzione (9) Sia x il numero di cifre 5 che compaiono nel numero N cercato e sia y il numero di cifre 7. Allora $5x + 7y \equiv 0 \bmod 9 \rightarrow 10x + 14y \equiv 0 \; mod \; 9 \rightarrow x + 5y \equiv 0 \; mod \; 9 \rightarrow x \equiv -5y \; mod \; 9 \rightarrow x \equiv 4y \; mod \; 9$. **Caso (1)** $x \equiv 0 \; mod \; 9$ e $y \equiv 0 \; mod \; 9$ cioè o $N = 555555555$ o $N = 777777777$. **Caso (2)** $x \equiv 4 \; mod \; 9$ e $y \equiv 1 \; mod \; 9$ e quindi il più piccolo N di questa forma sarà $N = 55557$. La risposta è dunque $\mathbf{5557}$.

Soluzione (10) **<u>PRIMA SOLUZIONE</u>**: Riferendoci alla figura a fianco riportata, sia x il raggio delle due circonferenze interne al trapezio e sia y la distanza BQ.



Per il Teorema delle Tangenti $BQ = BK$ e $CK = CH$, abbiamo che:

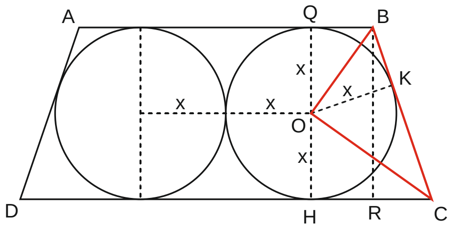
$$CH = RC + HR = \frac{400 - 240}{2} + y = 80 + y.$$

Per Pitagora $BR^2 + CR^2 = BC^2$ e quindi $(2x)^2 + 80^2 = (80 + 2y)^2$.

Siccome $AB = 2x + 2y = 240$, abbiamo che $2y = 240 - 2x$ che sostituito nell'equazione precedente fa si che $(2x)^2 + 80^2 = (80 + 240 - 2x)^2$ che risolta porta a determinare $\cancel{4x^2} + 6400 = 102400 + \cancel{4x^2} - 1280x$.

Da cui si ottiene $x = 75$ piedi. La risposta è dunque **75**.

SECONDA SOLUZIONE



Sia x il raggio delle due circonferenze interne al trapezio. Consideriamo il triangolo BOC che è rettangolo in O in quanto la somma $Q\hat{B}K + K\hat{C}H = 180°$ e quindi dimezzando $O\hat{B}K + K\hat{C}O = 90°$.

Abbiamo che $BK = QB = 120 - x$ e $HC = KC = 200 - x$.

Applicando il Secondo Teorema di Euclide abbiamo:

$OK^2 = BK \cdot KC$ da cui si ottiene l'equazione $x^2 = (200 - x)(120 - x)$ che risolta porta a determinare $x = 75 \text{ piedi}$. La risposta è dunque **75**.

Soluzione (11) Le luci del lampadario sono in totale 22. Da tutte le possibili $\binom{22}{3}$ terne di luci devo togliere quelle allineate. Nel cubo grande si hanno 3 spigoli ciascuno con 4 luci allineate, quindi ogni spigolo contiene 4 terne di punti allineati. Se consideriamo i tre spigoli in totale abbiamo 12 terne di luci allineate. Consideriamo una delle 3 facce del cubo grande concorrenti in V. Su di essa si individuano una diagonale con 4 punti allineati, una diagonale con 3 punti allineati e altri 3 punti allineati parallelamente a questi. Se consideriamo le tre facce concorrenti in V in totale abbiamo 3·(4+2) = 18 terne di luci allineate. Consideriamo le diagonali del cubo grande: la diagonale con V contiene 4 luci, le altre tre contengono 3 luci ciascuna. Si hanno così 4+3 = 7 terne di luci allineate. Se consideriamo il cubo medio a parte la diagonale con V che abbiamo già contato, ci sono tre diagonali con 3 luci ciascuna, quindi altre 3 terne di luci allineate. Quindi abbiamo un numero di terne di luci non allineate pari a:

$$\binom{22}{3} - 12 - 18 - 7 - 3 = \frac{22 \cdot 21 \cdot 20}{6} - 40 = 77 \cdot 20 - 2 \cdot 20 = 75 \cdot 20 = 1500.$$

Le possibili illuminazioni del lampadario sono quindi 1501, si deve contare anche il caso con tutte le luci accese. La risposta è dunque **1501**.

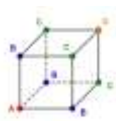
Soluzione (12) Indichiamo con A il vertice di partenza, con B i tre vertici raggiungibili da A strisciando su un solo spigolo, con D il vertice diametralmente opposto ad A e con C i tre vertici da cui è possibile raggiungere D con un solo spostamento. Indichiamo ora con x_n il numero di percorsi che consentono di arrivare a ciascuno dei vertici etichettati x (con $x \in \{A, B, C, D\}$) al termine del giorno n-esimo. Si hanno le seguenti relazioni ricorsive (facilmente verificabili osservando la figura):

$a_{n+1} = 3b_n$, $\quad b_{n+1} = a_n + 2c_n$,

$c_{n+1} = d_n + 2b_n$, $\quad d_{n+1} = 3c_n$,

con le "condizioni iniziali" $a_0 = 1$, $b_0 = c_0 = d_0 = 0$.

Basta a questo punto avviare il procedimento iterativo e si costruisce la seguente tabella:



n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	1	0	3	0	21	0	183	0	1641
b_n	0	1	0	7	0	61	0	547	0
c_n	0	0	2	0	20	0	182	0	1640
d_n	0	0	0	6	0	60	0	546	0

La risposta cercata è dunque **1641.**

Soluzione (13) Il cubo le cui facce sono divise in nove quadrati uguali è così diviso in 27 cubi più piccoli. Se il volume del cubo è V il volume di ogni cubo più piccolo è $\frac{1}{27}V$. Eliminando i parallelepipedi che hanno come base i quadrati centrali di facce opposte si ottiene il primo cubo forato il cui volume è $V_1 = \frac{20}{27}V$. Se ripetiamo il procedimento il volume del secondo cubo forato sarà $V_2 = \frac{20}{27}V_1 = \left(\frac{20}{27}\right)^2 V$. Dopo n passi avremo $V_n = \left(\frac{20}{27}\right)^n V$. Dobbiamo trovare n tale che $\left(\frac{20}{27}\right)^n < \frac{1}{2}$.

Calcoliamo $\left(\frac{20}{27}\right)^2 = \frac{400}{729} > \frac{1}{2}$, poi $\left(\frac{20}{27}\right)^3 = \frac{8000}{19683} < \frac{1}{2}$. La risposta è dunque **3**.

Soluzione (14) Possiamo avere i seguenti casi: $\left(\deg\left(p(x)\right), \deg\left(q(x)\right)\right) = (6,1)$ o $(3,4)$ o $(2,9)$

Eseguiamo il conteggio della somma dei possibili coefficienti in maniera generale.

Sia $p_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_0$. Vi sono in tutto 2^n polinomi.

Quindi la somma del coefficienti 1 di x^n è proprio 2^n.

Per tutti gli altri coefficienti abbiamo che la metà delle volte è 1 e l'altra metà vale 0, quindi ciascuno di loro contribuisce 2^{n-1} nella somma finale.

La somma di tutti i coefficienti di tutti i polinomi di grado n vale $S(n) = 2^n + n \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}(n+2)$

La soluzione cercata è $S(1)+S(2)+S(3)+S(4)+S(6)+S(9) = 3+8+20+48+256+2816 = 3151$.

La risposta è dunque **3151**.

Soluzione (15) Se osserviamo il gioiello perpendicolarmente a una faccia della pietra grezza si ha un ottagono regolare. Se con a indichiamo lo spigolo del cubo, allora lo spigolo s del nuovo solido, un rombicubottaedro sarà: $a = s + s\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad s = \frac{a}{1+\sqrt{2}}$

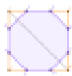
Il volume del rombicubottaedro si può ottenere come somma dei volumi dei vari solidi più semplici nei quali può essere scomposto.

- 1 cubo di spigolo s: $V = s^3 = \frac{a^3}{(1+\sqrt{2})^3}$;
- 6 parallelepipedi a base quadrata di lato s e altezza $\frac{s}{\sqrt{2}}$:

  $V = s^2 \frac{s}{\sqrt{2}} = \frac{s^3}{\sqrt{2}} = \frac{a^3}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})^3}$;

  12 prisma con base un triangolo rettangolo isoscele di cateti $\frac{s}{\sqrt{2}}$ e altezza s:

  $V = \frac{1}{2}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 s = \frac{s^3}{4} = \frac{a^3}{4(1+\sqrt{2})^3}$;



- 8 piramidi con base un triangolo rettangolo isoscele di cateti $\frac{s}{\sqrt{2}}$: e altezza $\frac{s}{\sqrt{2}}$:

  $V = \frac{1}{3}\frac{1}{2}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{s}{\sqrt{2}} = \frac{s^3}{12\sqrt{2}} = \frac{a^3}{12\sqrt{2}(1+\sqrt{2})^3}$.

Allora il volume del rombicubottaedro sarà:

$$V_R = \frac{a^3}{(1+\sqrt{2})^3} + 6\frac{a^3}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})^3} + 12\frac{a^3}{4(1+\sqrt{2})^3} + 8\frac{a^3}{12\sqrt{2}(1+\sqrt{2})^3} =$$

$$= \frac{a^3}{(1+\sqrt{2})^3}\left(4 + \frac{20}{3\sqrt{2}}\right) = a^3\frac{12\sqrt{2}+20}{3\sqrt{2}(7+5\sqrt{2})} = a^3\frac{12\sqrt{2}+20}{21\sqrt{2}+30} = a^3\frac{(12\sqrt{2}+20)(30-21\sqrt{2})}{900-882} =$$

$$= a^3\frac{96-60\sqrt{2}}{18} = a^3\frac{16-10\sqrt{2}}{3}$$

Ne segue che la percentuale della preziosa pietra finita come scarto sarà data da

$$p = \frac{V_C - V_R}{V_C} = 1 - \frac{16-10\sqrt{2}}{3} = \frac{10\sqrt{2}-13}{3} = \frac{14{,}142-13}{3} = \frac{1{,}142}{3} = 0{,}3806$$

L risposta è **38**.

Soluzione (16) Se considero solo il rettangolo formato da 12 righe e 15 colonne con i punti contenuti in esso si possono formare $C_{12,2} \cdot C_{15,2}$. Se considero solo il quadrato formato da 14 righe e 13 colonne con i punti contenuti in esso si possono formare $C_{14,2} \cdot C_{13,2}$.. Il rettangolo intersezione dei due precedenti è formato da 12 righe e 13 colonne e con i punti contenuti in esso si possono formare$C_{12,2} \cdot C_{13,2}$. Il numero dei rettangoli cercati sarà

$$N = \binom{12}{2}\cdot\binom{15}{2} + \binom{14}{2}\cdot\binom{13}{2} - \binom{12}{2}\cdot\binom{13}{2} = 6\cdot 11\cdot 7\cdot 15 + 6\cdot 13(7\cdot 13 - 6\cdot 11) =$$
$$= 6930 + 78\cdot 25 = 6930 + 1950 = 8880$$

La risposta è dunque $\mathbf{8880}$.

Soluzione (17) Riscriviamo $p(x)$ in maniera opportuna: $p(x) = x^{6072}(x^2 + x + 1)^3$ e sviluppiamo il cubo del trinomio. Ricordando che

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2a + 3b^2c + 3c^2a + 3c^2b + 6abc$$

si ha

$$p(x) = x^{6072}(x^6 + x^3 + 1 + 3x^5 + 3x^4 + 3x^4 + 3x^2 + 3x^2 + 3x + 6x^3) =$$

$$= x^{6072}(x^6 + 3x^5 + 6x^4 + 7x^3 + 6x^2 + 3x + 1) =$$
$$= x^{6078} + 3x^{6077} + 6x^{6074} + 7x^{6075} + 6x^{6074} + 3x^{6073} + x^{6072}$$

La risposta è dunque $\mathbf{7}$.

Soluzione (18) Si consideri il polinomio $P(x) = p(x) - 7x$. Dato che $P(n) = 0$ per ogni $1 \leq n \leq 3$, allora $P(x) = \alpha(x-1)(x-2)(x-3)$, da cui segue che $p(x) = \alpha(x-1)(x-2)(x-3) + 7x$. Sia poi $Q(x) = q(x) - 4x$, dato che $Q(n) = 0$ per ogni $1 \leq n \leq 6$, allora $Q(x) = \beta(x-1)(x-2)\ \cdots\ (x-6)$, da cui segue $q(x) = \beta(x-1)(x-2)\ \cdots\ (x-6) + 3x$. Dato che α è il coefficiente di grado massimo sia di $p(x)$ sia di $P(x)$ e analogamente β lo è per $q(x)$ e $Q(x)$, il rapporto cercato è dato da

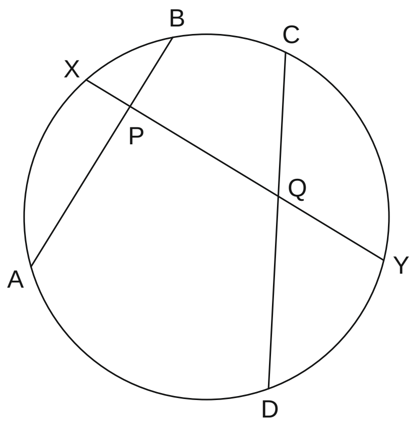
$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\dfrac{P(x)}{(x-1)(x-2)(x-3)}}{\dfrac{Q(x)}{(x-1)(x-2)\ \cdots\ (x-6)}} = \frac{P(x)(x-4)\ \cdots\ (x-6)}{Q(x)}$$

Dato che $p(21) = 21 = q(21)$ ne segue che $P(21) = 21 - 7\cdot 21 = -126$ e $Q(21) = 21 - 4\cdot 21 = -63$. Allora

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{P(21)(21-4)\ \cdots\ (21-7)}{Q(21)} = 2\cdot 17\cdot 16\cdot 15 = 8160$$

La risposta è dunque $\mathbf{8160}$.

Soluzione (19) Sia $PX = x$ e $QY = y$.



Applichiamo due volte il Teorema delle Corde (o potenza di un punto rispetto ad una circonferenza):

$$\begin{cases} PX \cdot PY = AP \cdot PB \\ QX \cdot QY = QC \cdot QD \end{cases} \text{ cioè } \begin{cases} x\cdot(27+y) = 6\cdot 5 \\ (27+x)\cdot y = 7\cdot 12 \end{cases}$$

Sistema che risolto porta a determinare

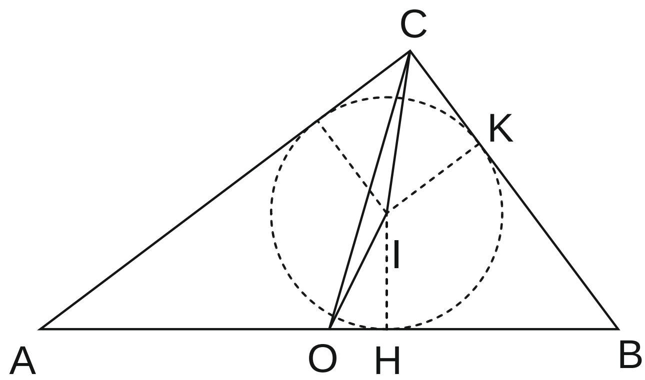
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

$XY = 27 + 1 + 3 = 31$ pollici.

La risposta cercata è pertanto $\mathbf{31}$.

Soluzione (20) **PRIMA SOLUZIONE**: Osserviamo che $18 = 3 \cdot 6$; $24 = 4 \cdot 6$ e $30 = 5 \cdot 6$.

Per la nota terna Pitagorica $(3;4;5)$, il triangolo è rettangolo. Sappiamo che l'ortocentro coincide con il vertice dell'angolo retto e il circocentro con il punto medio dell'ipotenusa.



L'incentro è il centro della circonferenza inscritta. Riferendoci alla figura a fianco determiniamo il raggio IH della circonferenza inscritta:

$$IH = \frac{A}{p} = \frac{\frac{24 \cdot 18}{2}}{\frac{24+18+30}{2}} = 6$$

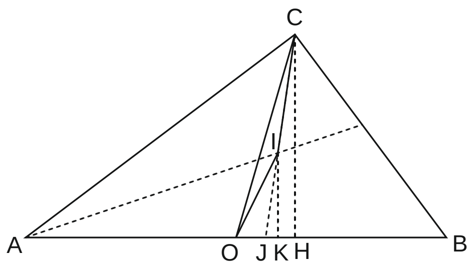
$$OI = \sqrt{OH^2 + IH^2} = \sqrt{(OB-HB)^2 + IH^2} = \sqrt{(OB-KB)^2 + IH^2} = \sqrt{(OB-(BC-IH))^2 + IH^2} =$$
$$\sqrt{(15-(18-6))^2 + 6^2} = \sqrt{3^2+6^2} = 3\sqrt{5}$$

Siccome $OC = 15$ e $IC = 6\sqrt{2}$, possiamo determinare l'area usando la Formula di Erone:

$$A_{COI} = \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}+6\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{15+3\sqrt{5}+6\sqrt{2}}{2} - 15\right) \cdot \left(\frac{15+3\sqrt{5}+6\sqrt{2}}{2} - 3\sqrt{5}\right) \cdot \left(\frac{15+3\sqrt{5}+6\sqrt{2}}{2} - 6\sqrt{2}\right)} =$$
$$\sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}+6\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{-15+3\sqrt{5}+6\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{15-3\sqrt{5}+6\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{15+3\sqrt{5}-6\sqrt{2}}{2}} =$$
$$\sqrt{\frac{\left(3\sqrt{5}+6\sqrt{2}\right)^2 - 15^2}{4} \cdot \frac{15^2 - \left(3\sqrt{5}-6\sqrt{2}\right)^2}{4}} = \sqrt{\frac{45+72+36\sqrt{10}-225}{4} \cdot \frac{225-45-72+36\sqrt{10}}{4}} =$$
$$\sqrt{\frac{36\sqrt{10}-108}{4} \cdot \frac{36\sqrt{10}+108}{4}} = \sqrt{\left(9\sqrt{10}-27\right)\left(9\sqrt{10}+27\right)} = \sqrt{810-729} = \sqrt{81} = 9 \text{ piedi}^2.$$

La risposta è dunque **9**.

SECONDA SOLUZIONE



Osserviamo che $18 = 3 \cdot 6$; $24 = 4 \cdot 6$ e $30 = 5 \cdot 6$.

Per la nota terna Pitagorica $(3;4;5)$, il triangolo è rettangolo. Sappiamo che l'ortocentro coincide con il vertice dell'angolo retto e il circocentro con il punto medio dell'ipotenusa.

L'incentro è il centro della circonferenza inscritta. Riferendoci alla figura a fianco determiniamo il raggio IK della circonferenza inscritta $IK = \frac{A}{p} = 6$.

Sfruttando il Teorema della Bisettrice determiniamo la misura di AJ: $(AJ:30) - AJ = AC:BC$ e quindi $AJ = \frac{120}{7}$. Segue che $OJ = AJ - AO = \frac{120}{7} - 15 = \frac{15}{7}$.

L'altezza del triangolo relativa all'ipotenusa misura $CH = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{18 \cdot 24}{30} = \frac{72}{5}$.

$$A_{OCI} = A_{OJC} - A_{OJI} = \frac{OJ \cdot CH}{2} - \frac{OJ \cdot IK}{2} = \frac{OJ \cdot (CH - IK)}{2} = \frac{1}{2}\frac{15}{7}\left(\frac{72}{5} - 6\right) = 9 \text{ piedi}^2.$$

La risposta è dunque **9**.